Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Propriedade Forte de Markov

Propriedade de Markov de dada (X_n): $\forall\,\ell \geq 1,\ n \geq 0$ fixos

$$\mathbb{P}(X_{n+\ell} = \cdot | X_k,\, 0 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(X_{n+\ell} = \cdot | X_n) = \mathbb{P}_{X_n}(X_\ell = \cdot),$$

onde $\mathbb{P}_{X_n}(X_\ell = \cdot) = \mathbb{P}_x(X_\ell = \cdot)|_{x=X_n}$.

Extensão para tempos T aleatórios (va's inteiras não negativas no mesmo espaço de probabilidades que (X_n)):

$$\mathbb{P}(X_{T+\ell} = \cdot | X_r,\, 0 \leq k \leq T) = \mathbb{P}_{X_T}(X_\ell = \cdot) \qquad (\dagger)$$

Não pode ser válido em geral; exemplo: $\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$,

$T = \sup\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ (convenção: $\sup \emptyset = 0$)

... tempo da última visita a 1. (**Obs.** $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$)

Supondo $\mu_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, como $X_T = 1$ (qc):

$$\mathbb{P}(X_{T+1} = 1 | X_r,\, 0 \leq k \leq T) = 0 \neq 1/2 = P_{11}.$$

Precisamos de condições sobre T para a validade de $(\dagger)$.

Tempos de parada

Dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde haja uma sequência $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias, e uma variável aleatória $T \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dizemos que T é um *tempo de parada* (TP) para $\mathbf{X}$, se para cada $n \in \mathbb{N}$

o evento $\{T = n\}$ *não depender de* $\{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}^*$.

Exemplos. (Suponhamos que para todo $n \geq 0, X_n \in \mathcal{S}$ enumerável)

1) *Tempo de* 1^a *passagem*: dado $x \in \mathcal{S}$, seja

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}.$$

Então $\{T_x = 1\} = \{X_1 = x\}$, e para $n \geq 2$

$$\{T_x = n\} = \{X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x\};$$

logo, T_x é um TP.

Obs. Sob $\mathbb{P}_x$, também chamamos T_x de *tempo de retorno* a x.

---

*Pode depender de $\{X_0, \dots, X_n\}$.

Tempos de parada (exs.)

2) Dado $A \subset \mathcal{S}$,

$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$: *tempo de chegada* em A.

Então $\{H^A = 0\} = \{X_0 \in A\}$, e para $n \geq 1$

$$\{H^A = n\} = \{X_0 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\};$$

logo, H^A é um TP.

3) *Tempo de última visita*: $L^A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}$

Não é em geral um TP: $\{L^A = n\}$ depende de $\{X_{n+k},\ k \geq 0\}$.

No exemplo de slide 2 acima: $T = L^{\{1\}}$. (Mas considere o exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

4) Tempos determinísticos são TP's.

Teorema 1 (Propriedade Forte de Markov — PFM)

Seja (X_n) uma CM e T um TP. Então $\forall x; y_1, \ldots, y_n; x_0, x_1, \ldots \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}(X_{T+1} = y_1, \ldots, X_{T+n} = y_n | T < \infty, X_0 = x_0, \ldots, X_{T-1} = x_{T-1}, X_T = x)$$
$$= \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n), \ n \geq 1.$$

Obs. O Teorema 1 diz que se $T < \infty$, então, dado que $X_T = x$,

i) $(X_{T+1}, \ldots, X_{T+n})$ é independente de $(X_0, \ldots, X_{T-1})$, e

ii) tem a mesma distribuição que $(X_1, \ldots, X_n)$ sob $\mathbb{P}_x$.

Dem. do Teorema 1

Para $n \geq 0$. fixo, sejam os eventos

$$A = \{T < \infty, X_0 = x_0, \ldots, X_{T-1} = x_{T-1}, X_T = x\},$$
$$B = \{X_{T+1} = y_1, \ldots, X_{T+n} = y_n\}, \text{ e}$$
$$C = \{X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n\}.$$

Queremos mostrar que $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B \cap A)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_x(C)$. $\qquad (*)$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(B \cap A) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(\overbrace{T = \ell, X_0 = x_0, \ldots, X_{\ell-1} = x_{\ell-1}}^{D_\ell}, X_\ell = x, \ldots, X_{\ell+n} = y_n) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{\ell+1} = y_1, \ldots, X_{\ell+n} = y_n | X_\ell = x, D_\ell)\, \mathbb{P}(X_\ell = x, D_\ell) \end{aligned}$$

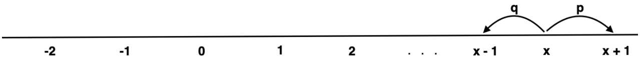
Dado $X_\ell = x$, D_ℓ só depende de $\{X_0, \ldots, X_{\ell-1}\}$; da propriedade de Markov (incluindo a homogeneidade temporal):

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n) \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_\ell = x, D_\ell) = \mathbb{P}_x(C)\mathbb{P}(A).$$

Substituindo em $(*)$, segue o resultado. $\square$

Exemplo — Passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$

$$q = 1 - p \in (0,1)$$



H_x = tempo de chegada em $x = H^{\{x\}}$, $x \in \mathbb{Z}$.[†]

Dado que $X_0 = 2$ e $H_1 < \infty$, temos que $H_0 = H_1 + \tilde{H}_0$, onde

$$\tilde{H}_0 = \inf\{n \geq 0 : X_{H_1+n} = 0\}.^\ddagger$$

Pela PFM, temos que, sob $\mathbb{P}_2(\cdot | H_1 < \infty)$, $\tilde{H}_0$ é independente de H_1 e tem a mesma distribuição que H_0 sob $\mathbb{P}_1$.

Obs. Temos ainda que H_1 sob $\mathbb{P}_2$ tem a mesma distribuição que H_0 sob $\mathbb{P}_1$, pela homogeneidade *espacial* do PAS[§].

[†] usando a notação do Exemplo 2 acima

[‡] $H_1 = \infty \Rightarrow H_0 = \infty$

[§] $P(x,y) = P(0, y-x) \; \forall \; x, y$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

Logo, para $0 \leq s < 1$, temos (lembrando que, nesse caso, $s^\infty = 0$)

$$\mathbb{E}_2(s^{H_0}) = \mathbb{E}_2(s^{H_0}, H_1 < \infty) = \mathbb{E}_2(s^{H_1+\tilde{H}_0} | H_1 < \infty)\,\mathbb{P}_2(H_1 < \infty)$$

$$= \mathbb{E}_2(s^{H_1} | H_1 < \infty) \times \underbrace{\mathbb{E}_2(s^{\tilde{H}_0} | H_1 < \infty)}_{\mathbb{E}_2(s^{\tilde{H}_0} | H_1<\infty, X_{H_1}=1) \overset{\text{PFM}}{=} \mathbb{E}_1(s^{H_0})} \times \mathbb{P}_2(H_1 < \infty)$$

$$= \mathbb{E}_2(s^{H_1}, H_1 < \infty)\,\mathbb{E}_1(s^{H_0}) \overset{**}{=} \mathbb{E}_1(s^{H_0})\,\mathbb{E}_1(s^{H_0}) =: \phi^2(s),$$

onde $\overset{**}{=}$ segue da observação ao final do slide anterior.

Por outro lado, pela Propriedade de Markov simples

$$\phi(s) = \mathbb{E}_1(s^{H_0}) = p\,\mathbb{E}_2(s^{H_0+1}) + q\,\mathbb{E}_0(s^{H_0+1}) = ps\,\phi^2(s) + qs. \qquad (\star)$$

Logo, para cada $s \in [0,1)$, $\phi(s)$ satisfaz a equação $ps\,x^2 - x + qs = 0$, cujas raízes são $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$. Como ϕ é contínua em $[0,1)$ e $\phi(0) = 0$:

$$\phi(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps} \qquad (*)$$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

$$1)\ \mathbb{P}_1(H_0 < \infty) = \lim_{s \nearrow 1} \phi(s) \overset{(*)}{=} \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2p} = \begin{cases} 1, & p \le q; \\ \frac{q}{p}, & p > q. \end{cases} \tag{1}$$

2) Expansão de Taylor de $(*)$ em torno de 0. Para $k \ge 1$:

$$\frac{d^k}{dt^k}(\overbrace{1 - \sqrt{1 - t}}^{f(t)}) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2k-1} \frac{1}{2^k} (1 - t)^{-\frac{2k-1}{2}} \overset{t=0}{=} \frac{1}{2k-1} \left\{ \frac{(2k)!}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \right\} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2k-1} \left\{ \frac{(2k)!}{k!} \frac{1}{2^k} \right\} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{1}{4^k} k! = \underbrace{\frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}}_{a_k} k!$$

Expansão de Taylor de f em torno de 0: $f(t) = \sum_{k \ge 1} a_k t^k$. Logo

$$\phi(s) = \frac{1}{2ps} f(4pqs^2) = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{2(2k-1)} \binom{2k}{k} \frac{1}{\cancel{4^k}} \cancel{4^k} p^{k-1} q^k s^{2k-1} = \sum_{j \ge 0} p_j\, s^j,$$

$$\text{onde } p_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \text{ for par}, \\ \frac{1}{2j} \binom{j+1}{\frac{j+1}{2}} p^{\frac{j-1}{2}} q^{\frac{j+1}{2}}, & \text{se } j \text{ for ímpar}. \end{cases} \tag{2}$$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

Identificando: de (2) e $\phi(s) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_1(H_0 = j)\, s^j$, segue que

$$\mathbb{P}_1(H_0 = j) = p_j,\ j \geq 0.$$

Valor esperado

$\mathbb{E}_1(H_0, H_0 < \infty) = \lim_{s \nearrow 1} \phi'(s)$

Em vez de partir de $(*)$, vamos diferenciar $(\star)$ em $(0,1)$:

$$\phi' = p\phi^2 + \underbrace{2ps\phi}_{<1 \text{ em } [0,1)}\phi' + q \Rightarrow \phi' = \frac{p\phi^2+q}{1-2p\phi s} \xrightarrow[s\uparrow 1]{(1)} \begin{cases} \frac{p+q}{1-2p} = \frac{1}{1-2p}, & p \leq q \\ \qquad (= \infty, & p = q) \\ \frac{p\frac{q^2}{p^2}+q}{1-2p\frac{q}{p}} = \frac{q/p}{1-2q}, & p > q \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbb{E}_1(H_0) = \frac{1}{1-2p},\ \text{se } p \leq q;\ \text{e } \mathbb{E}_1(H_0 | H_0 < \infty) = \frac{1}{|1-2p|}\ \forall\ p.$$

Valor esperado (cont.)

Seja $\mathbb{E}_x(H_0)$, $x \geq 1$, $p \leq 1/2$.

Notemos que dado que $X_0 = x$, temos

$$H_0 = \tilde{H}_{x-1} + \tilde{H}_{x-2} + \cdots + \tilde{H}_1 + \tilde{H}_0, \text{ onde } \tilde{H}_{x-1} = H_{x-1} \text{ e}$$

$$\tilde{H}_z = \inf\{n \geq 0 : X_{\tilde{H}_{x-1}+\cdots+\tilde{H}_{z+1}+n} = z\},\ z < x-1.$$

Homogeneidade espacial: sob $\mathbb{P}_x$, $\tilde{H}_{x-1} \sim H_0$ sob $\mathbb{P}_1$, e logo $\tilde{H}_{x-1} < \infty$ qc.

Da PFM, sob $\mathbb{P}_x$, $\tilde{H}_0, \ldots, \tilde{H}_{x-1}$ são iid $\sim H_0$ sob $\mathbb{P}_1$, e logo são todas finitas quase certamente.

Segue prontamente que

$$\mathbb{E}_x(H_0) = x\,\mathbb{E}_1(H_0) = \frac{x}{1-2p}.$$